ПИСМЕНИ ИСПИТ ИЗ ТЕОРИЈЕ БРОЈЕВА
27. јун 2016

Професор: Бојан Башић

1. У скупу $\mathbb{N}$ решити једначину
$$2!! \cdot 4!! \cdots (2k)!! = (k(k+1))!!.$$
Једна идеја: Расписати све двоструке факторијеле као производе, па обратити пажњу на укупан број чинилаца са сваке стране једнакости.

2. Дата је матрица
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & \cdots & j & \cdots & 100 \\ 2 & 4 & \cdots & \cdots & 2j & \cdots & 200 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ i & 2i & \cdots & \cdots & ij & \cdots & 100i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 100 & 200 & \cdots & \cdots & 100j & \cdots & 100^2 \end{bmatrix}.$$
У њој је заокружено 100 бројева, рецимо $a_1, a_2, \dots, a_{100}$, при чему је у свакој врсти заокружен тачно један број, и у свакој колони заокружен тачно један број. Израчунати остатак при дељењу броја $a_1 a_2 \cdots a_{100}$ са 101.

3. Нека је број $F_n = 2^{2^n} + 1$ прост (Фермаов прост број).
   a) Доказати: $\varphi(F_n - 1) = \frac{F_n - 1}{2}$;
   b) Доказати да је сваки квадратни неостатак по модулу F_n такође и примитивни корен по модулу F_n.

   Једна идеја: За део под b) упоредити број различитих примитивних корена по простом модулу с бројем квадратних неостатака, па закључак добити из констатације да сваки примитивни корен мора бити квадратни неостатак.

4. Доказати да једначина $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = -1$ нема целобројна решења, али да за сваки прост број p постоје $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ такви да важи $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \equiv -1 \pmod{p}$.